Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #7, Μάιος 2016, Ορθογώνιοι Πίνακες, Συμμετρικοί Πίνακες, Τετραγωνικές Μορφές

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A + 3I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

2. Θεωρούμε τον συμμετρικό πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

3. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο
$$f(x, y, z) = (ax - y + z, -x + by - z, x - y + 2z),$$
όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $a, b \in \mathbb{R}$.
   - Να υπολογίσετε τα a, b έτσι ώστε η απεικόνιση f να έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2.
   - Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και στη συνέχεια
   - να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $B^m = A$, όπου A είναι ο πίνακας της f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και m φυσικός αριθμός.

4. Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο συμμετρικός πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
να είναι θετικά ορισμένος.

5. Έστω A και B δύο θετικά ορισμένοι συμμετρικοί $n \times n$ πραγματικοί πίνακες. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $aA+bB$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπου a, b είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι διάφορος του μηδενός.

6. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$q((x, y, z)^t) = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy$$
Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν. Να δείξετε ότι ο πίνακας A της q είναι θετικά ορισμένος. Να βρεθεί συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ 12/05/2016

Υπενθύμιση από το προηγούμενο μάθημα:

(1) Φασματικό θεώρημα: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^t = A$ (συμμετρικός) $\Big\}$ $\Rightarrow$ A διαγωνιοποιήσιμος $\exists P$ ορθογώνιος (δηλ. $P^t P = I$) τέτοιος ώστε $P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$

(2) Τετραγωνικές Μορφές:

$$q : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}, \quad q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} x_i x_j$$

(3) Πίνακας τετραγωνικής μορφής: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \cdots & a_{ij}/2 \cdots \\ a_{12}/2 & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \cdots & a_{ij}/2 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$q(X) = X^tAX = (x_1\, x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \cdots \\ a_{12}/2 & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(4) $X = QZ$ με Q αντιστρέψιμο πίνακα

$q(X) = X^t AX$

$$q'(Z) = (QZ)^t A (QZ) = Z^t(Q^tAQ)Z.$$

Έχουμε ότι A συμμετρικός και άρα από το φασματικό θεώρημα $\Rightarrow$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Q = P \quad \text{όπου } P \text{ ορθογώνιος.}$$

$$q(Z) = Z^t(P^tAP)Z = Z^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}Z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A. $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

Έχουμε $P = [I]^{\varepsilon}_{a}$ με ε κανονική βάση και a ορθοκανονική με $a = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$.

(*) Τα ιδιοδιανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του πίνακα A ονομάζονται <u>κύριοι</u> <u>άξονες</u> της τετραγωνικής μορφής q

---

Τετραγωνική μορφή: $q(x) = \sum a_{ij} x_i \cdot x_j$

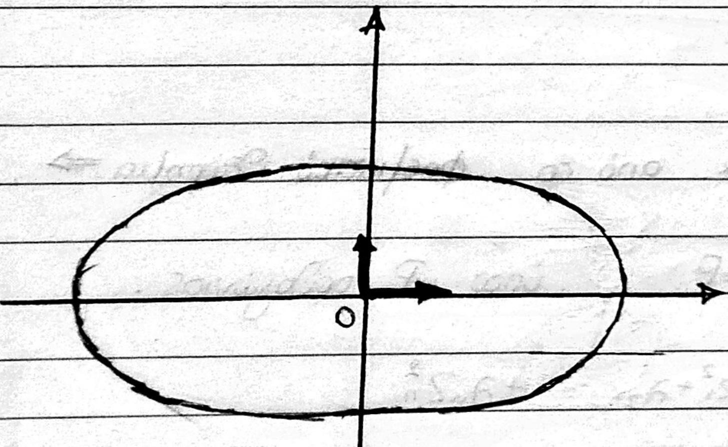
Δευτεροβάθμια εξίσωση: $\underbrace{\sum a_{ij} x_i x_j}_{\text{δευτεροβάθμιος όρος}} + \underbrace{\sum a_i x_i}_{\text{πρωτοβάθμιος όρος}} + \underbrace{b}_{\text{σταθερά}} = 0$

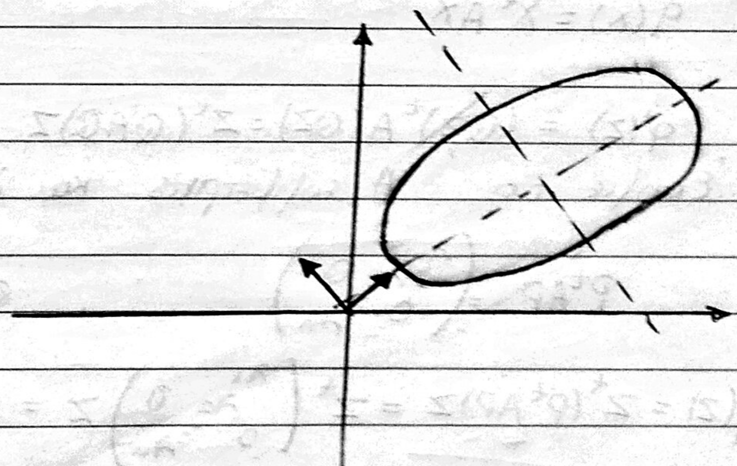
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ → $x^2 - y = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{δευτεροβάθμιος όρος}} \underbrace{- 2ax - 2by}_{\text{πρωτοβάθμιος όρος}} + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_{\text{σταθερά}} = 0$

(*) <u>Σε μιά έλλειψη κύριοι άξονες είναι οι άξονες συμμετρίας της έλλειψης.</u>





Ο μοναδιαίος πίνακας έχει μοναδική ιδιοτιμή το 1.

Έστω τον μοναδιαίο πίνακα $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \text{ ιδιοτιμή } \lambda=1$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \text{κλιμακωτός} \quad \begin{array}{l} x=t\\ y=s\end{array}$$

Άσκηση: Δίνεται την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ με τύπο $q\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή στους κύριους άξονες.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον τύπο για πίνακα της τετραγωνικής αναπαράστασης προκύπτει:

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Για τους άξονες: $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε:

$$q\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2$$ (πρέπει να βρω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)

Ο πίνακας A είναι ο $A = \begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ → → →

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & -2 \\ 0 & 2-x & -2 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = (4-x)(x^2-5x+6-4) - 4(2-x) =$$

$$= -x^3 + 9x^2 - 18x = -x(x-3)(x-6).$$

(εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρητή λύση τότε αναγκαστικά είναι ακέραια και όλοι οι συντελεστές του $\chi_A(x)$ είναι ακέραιοι).

Η αναγωγή της τετραγωνικής μορφής στους κύριους άξονες είναι:

$$q\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0z_1^2 + 3z_2^2 + 6z_3^2.$$

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1/4 \\ r_2/2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(Σίγουρα η τελευταία γραμμή είναι μηδενική γιατί αλλιώς θα είχα 3 αρχικές μονάδες)

$x_1 = \frac{1}{2}s$, $x_2 = s$, $x_3 = s$

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s \\ s \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Πρέπει να βρω ορθοκανονική βάση.

Πώς κάνω ένα διάνυσμα κανονικό? Το διαιρώ με το μήκος του.

$\longrightarrow$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

(• Αν έχω ένα διάνυσμα το κάνω μόνο κανονικό
• Αν έχω δύο και πάνω τα κάνω πρώτα ορθογώνια & μετά κανονικά)

$$V(3) = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}4-3 & 0 & -2\\0 & 2-3 & -2\\-2 & -2 & 3-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & -1 & 2 & 0\\-2 & -2 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

(δεν περιμένω τρεις αρχικές μονάδες)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0\\ x_2 + 2x_3 &= 0\\ x_3 &= t.\end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= 2t\\ x_2 &= -2t\\ x_3 &= t\end{aligned}, \text{ με } t \in \mathbb{R}.$$

$$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix} \right\rangle.$$

(Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους αν ο πίνακας είναι συμμετρικός.)

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

→ → → →

$$V(6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ (A-6I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -\frac{1}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$V(6) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

Άρα οι κύριοι άξονες της q είναι:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας (δλδ $A^t = A$)
Ο A λέγεται <u>θετικός</u> αν $<AX, X> = X^t A X$

<u>Σχόλιο</u>: $\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, με $A > 0$.

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} > = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

→ συνήθες εσωτερικό γινόμενο.

$$<x, y> = x^t \cdot y$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$<AX, X> = (AX)^t X = X^t A^t X = X^t A X.$$

$\underline{X^t A X > 0}$ (λέω A θετικό ορισμένος)

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας ($A^t = A$). Ο A λέγεται μη αρνητικός αν $<AX, X> = X^t A X > 0$

Ο A λέγεται αρνητικός όταν $<AX, X> = X^t A X < 0$

Ο A λέγεται μη-θετικός όταν $<AX, X> \leq 0$.

Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας.
Ο A είναι θετικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική.

Απόδειξη:

A συμμετρικός $\xrightarrow{\text{φασματικό θεώρημα}}$ όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί

Έστω λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$

με A θετικό.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $x^t A x > 0 \Rightarrow x^t \lambda x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda (x^t x) > 0 \xrightarrow{\lambda > 0} \lambda (\|x\|)^2 > 0$
(γιατί το μήκος είναι πάντα θετικό)

Πρόταση

① A μη-αρνητικός $\Leftrightarrow$ λ μη-αρνητική, $\lambda \geq 0$

② A μη-θετικός $\Leftrightarrow$ λ μη-θετική, $\lambda \leq 0$

③ A αρνητικός $\leftrightarrow$ λ αρνητικός, $\lambda < 0$.

Αν όλες οι ιδιοτιμές λ ήταν $\lambda > 0 \Rightarrow A > 0$.
A συμμετρικός και όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές

Έστω $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

A συμμετρικός $\xrightarrow[\text{θεώρημα}]{\text{φασματικό}}$ $\exists$ ορθογώνιος πίνακας P ώστε $P^t A P$ διαγώνιος

$$P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{με } \lambda_i > 0 .$$

$x = Py \Rightarrow x = P^t x$. Ισχυρίζομαι: $y \neq 0$. γιατί αν $y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = P^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Άτοπο. $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

$$x^t A x = (Py)^t A (Py) = y^t (P^t A P) y = y^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} y =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ και τουλάχιστον ένα $y_i \neq 0$ γιατί $y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Κριτήριο Sylvester:

Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{ij} \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & b_{ij} & \ddots & b_{nn} \end{pmatrix}$ είναι θετικός αν και μόνο αν

(i) $b_{11} > 0$ (det 1×1)

(ii) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0$ (det 2×2)

(iii) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} > 0$ (det 3×3)

Φυλλάδιο #6

<u>Άσκηση 2</u> : $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$$

(i) Νδο ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

(ii) Νδο η γρ. απεικόνιση

$$T : (\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle_{can}) \to (\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle) \text{ με τύπο}$$

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}} \right)$$

όπου $\langle \cdot , \cdot \rangle_{can}$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, (είναι ισομετρία)

<u>Λύση</u> : (i)

① Συμμετρική : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ (προφανές)

② Διγραμμική : $\langle \vec{x} + \vec{x}', \vec{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

③ Θετικά ορισμένη

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle > 0 \quad \text{αν } (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$$

(ii) $T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}} \right)$

Πότε μια απεικόνιση T είναι ισομετρία; Όταν διατηρεί το μήκος.

$$\| (x_1, x_2, x_3) \|_{can} = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} =$$

$$= \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} .$$

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

$$\|T(x_1,x_2,x_3)\| = \left\|\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right)\right\| =$$

$$= \sqrt{\left\langle \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right) \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|(x_1,x_2,x_3)\|_{\text{can}} \Rightarrow T \text{ ισομετρία.}$$

Άσκηση 4 # Φυλλάδιο 7.

Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ να είναι θετικά ορισμένος.

Λύση : Κριτήριο Sylvester

$$A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$$

$1 - a^2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a^2 > -1 \Rightarrow$
$a^2 < 1$.

$-1 < a < 1$

$$\det A > 0 \Rightarrow 1 - a^2 - a^2 > 0 \Rightarrow -2a^2 > -1 \Rightarrow a^2 < \frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.